

4. cvičení - řešení

Příklad 1 (a) $2x^4y + x^3 + y^3 + xy = 1, [x_0, y_0] = [1, 0]$

Implicitní funkce: Anulujeme zadanou rovnici. Dostaneme: $2x^4y + x^3 + y^3 + xy - 1 = 0$. Zadefinujeme funkci $F(x, y) = 2x^4y + x^3 + y^3 + xy - 1$. Nyní ověříme předpoklady Věty 22. K ověření podmínky (i) spočítáme parciální derivace.

$$F'_x(x, y) = 8x^3y + 3x^2 + y$$

$$F'_y(x, y) = 2x^4 + 3y^2 + x$$

Zřejmě tedy $F \in C^1(\mathbb{R}^2)$, neb má všechny parciální derivace spojité.

Dosazením snadno ověříme, že $F(x_0, y_0) = 0$. Zbývá tedy ověřit podmínku (iii). Platí

$$F'_y(x_0, y_0) = F'_y(1, 0) = 2 \cdot 1^4 + 3 \cdot 0^2 + 1 = 3 \neq 0.$$

Podle Věty 22 tedy existuje otevřené okolí $U \subset \mathbb{R}$ bodu 1 a $V \subset \mathbb{R}$ bodu 0 takové, že pro každé $x \in U$ existuje právě jedno $y = \varphi(x) \in V$ t.ž. $F(x, \varphi(x)) = 0$. Speciálně platí, že $\varphi(1) = 0$, neb bod $[x_0, y_0]$ splňuje, že $F(x, y) = 0$. Toho využijeme při výpočtu $\varphi'(x_0)$.

První derivace φ : Dle této věty platí následující:

$$\varphi'(x_0) = -\frac{F'_x(x_0, \varphi(x_0))}{F'_y(x_0, \varphi(x_0))} = -\frac{F'_x(1, 0)}{F'_y(1, 0)} = -\frac{3}{3} = -1.$$

Dále dle Věty 21 platí následující.

$$F''_{x,y}(x, y) = F''_{y,x}(x, y) = 8x^3 + 1$$

$$F''_{x,x}(x, y) = 24x^2y + 6x$$

$$F''_{y,y}(x, y) = 6y$$

Druhá derivace φ : Spočítáme $\varphi''(x_0)$. Zderivováním rovnosti $\varphi'(x) = -\frac{F'_x(x, \varphi(x))}{F'_y(x, \varphi(x))}$ dostaneme dle Věty 20:

$$\begin{aligned} \varphi''(x) &= \frac{-1}{(F'_y(x, \varphi(x)))^2} \left(\frac{\partial}{\partial x} F'_x(x, \varphi(x)) \cdot F'_y(x, \varphi(x)) - F'_x(x, \varphi(x)) \cdot \frac{\partial}{\partial x} F'_y(x, \varphi(x)) \right) \\ \frac{\partial}{\partial x} F'_x(x, \varphi(x)) &\stackrel{\text{V 20}}{=} F''_{xx}(x, \varphi(x)) + F''_{x,y}(x, \varphi(x)) \cdot \varphi'(x) \\ \frac{\partial}{\partial x} F'_y(x, \varphi(x)) &\stackrel{\text{V 20}}{=} F''_{y,x}(x, \varphi(x)) + F''_{y,y}(x, \varphi(x)) \cdot \varphi'(x) \end{aligned}$$

Dosadíme $[x_0, y_0]$.

$$\frac{\partial}{\partial x} F'_x(x_0, \varphi(x_0)) = F''_{xx}(1, 0) + F''_{x,y}(1, 0) \cdot \varphi'(1) = 6 - 9 = -3$$

$$\frac{\partial}{\partial x} F'_y(x_0, \varphi(x_0)) = F''_{y,x}(1, 0) + F''_{y,y}(1, 0) \cdot \varphi'(1) = 9$$

$$\varphi''(x_0) = \frac{-1}{9} (-3 \cdot 3 - 3 \cdot 9) = 4$$

Tečná nadrovina: křivka daná rovnicí $2x^4y + x^3 + y^3 + xy = 1$ je na okolí bodu $[x_0, y_0]$ grafem funkce φ . Dosadíme tedy derivaci φ do definici tečné nadroviny.

$$T(x) = \varphi(x_0) + \varphi'(x_0)(x - x_0) = 0 - 1(x - 1).$$

$T(x)$ je y -ová souřadnice tečné nadroviny. Proto je tečná nadrovina ke křivce dané rovnicí $2x^4y + x^3 + y^3 + xy = 1$ v bodě $[1, 0]$ dána rovnicí $y = 1 - x$

Monotonie a konvexita:

Dle spočítaného je $\varphi'(x_0) < 0$ a víme, že funkce φ má spojitou první derivaci. Platí proto, že první derivace je na okolí x_0 záporná, tedy funkce klesá na okolí x_0 . Analogicky z kladnosti druhé derivace v bodě x_0 a její spojitosti zde plyne, že je funkce φ konkávní v x_0 .

Trochu jiný výpočet derivací φ :

Derivace φ by se dala též spočítat takto:

Rovnost $F(x, \varphi(x)) = 0$ nám dává rovnici

$$2x^4\varphi(x) + x^3 + \varphi(x)^3 + x\varphi(x) - 1 = 0.$$

Jejím zderivováním podle x dostaneme rovnici

$$8x^3\varphi(x) + 2x^4\varphi'(x) + 3x^2 + 3\varphi(x)^2\varphi'(x) + \varphi(x) + x\varphi'(x) = 0.$$

Upravujeme.

$$\begin{aligned}\varphi'(x)(2x^4 + 3\varphi(x)^2 + x) &= -8x^3\varphi(x) - 3x^2 - \varphi(x) \\ \varphi'(x) &= -\frac{8x^3\varphi(x) + 3x^2 + \varphi(x)}{2x^4 + 3\varphi(x)^2 + x}\end{aligned}$$

Do poslední rovnice dosadíme $\varphi(x_0) = 0, x_0 = 1$ a dostaneme $\varphi'(x_0) = -1$. Zderivujeme získaný vztah pro $\varphi'(x)$. Dostaneme:

$$\begin{aligned}A(x) &:= 8x^3\varphi(x) + 3x^2 + \varphi(x) \\ B(x) &:= 2x^4 + 3\varphi(x)^2 + x \\ A'(x) &= 24x^2\varphi(x) + 8x^3\varphi'(x) + 6x + \varphi'(x) \\ B'(x) &= 8x^3 + 6\varphi(x) \cdot \varphi'(x) + 1 \\ \varphi''(x) &= -\frac{A'(x)B(x) - A(x)B'(x)}{B^2(x)} \\ A(x_0) &= 3, A'(x_0) = -8 + 6 - 1 = -3 \\ B(x_0) &= 3, B'(x_0) = 9 \\ \varphi''(x_0) &= -\frac{-3 \cdot 3 - 3 \cdot 9}{9} = -\frac{-4 \cdot 9}{9} = 4\end{aligned}$$

Příklad 1 (b) $x^2 + 2xy^2 + y^4 - y^5 = 0, (x_0, y_0) = (0, 1)$

Implicitní funkce: Zaveďme funkci $F(x, y) = x^2 + 2xy^2 + y^4 - y^5$. Ověřme předpoklady Věty 22.

$$\begin{aligned}F'_x(x, y) &= 2x + 2y^2, \quad F'_x(0, 1) = 2 \\ F'_y(x, y) &= 4xy + 4y^3 - 5y^4, \quad F'_y(0, 1) = -1 \neq 0\end{aligned}$$

Zřejmě $F \in C^1(\mathbb{R})$ a $F(0, 1) = 0$.

Dle Věty 22 zadaná rovnice určuje na okolí bodu $[x_0, y_0]$ implicitně zadanou funkci φ a platí, že $\varphi(x_0) = y_0$.

První derivace φ :

Podle vzorce z Věty 22 platí následující.

$$\varphi'(0) = -\frac{F'_x(0, 1)}{F'_y(0, 1)} = \frac{-2}{-1} = 2$$

Druhá derivace φ :

Spočítejme nejdříve druhé derivace funkce F .

$$\begin{aligned} F''_{xx}(x, y) &= 2, \quad F''_{xx}(0, 1) = 2 \\ F''_{xy}(x, y) &= 4y, \quad F''_{xy}(0, 1) = 4 \\ F''_{yx}(x, y) &= 4y, \quad F''_{yx}(0, 1) = 4 \\ F''_{yy}(x, y) &= 4x + 12y^2 - 20y^3, \quad F''_{yy}(0, 1) = -8 \end{aligned}$$

Předpis pro φ' zderivujeme podle x , využijeme řetízkové pravidlo a stejně jako v předchozím příkladu dostáváme:

$$\varphi''(x) = -\frac{A(x) - B(x)}{(F'_y(x, \varphi(x)))^2}$$

kde

$$\begin{aligned} A(x) &= (F''_{xx}(x, \varphi(x)) + F''_{x,y}(x, \varphi(x)) \cdot \varphi'(x)) F'_y(x, \varphi(x)) \\ B(x) &= F'_x(x, \varphi(x)) \cdot (F''_{yx}(x, \varphi(x)) + F''_{yy}(x, \varphi(x)) \cdot \varphi'(x)) \\ A(0) &= (F''_{xx}(0, 1) + F''_{x,y}(0, 1) \cdot \varphi'(0)) F'_y(0, 1) = (2 + 4 \cdot 2) \cdot (-1) = -10 \\ B(0) &= F'_x(0, 1) \cdot (F''_{yx}(0, 1) + F''_{yy}(0, 1) \cdot \varphi'(0)) = 2 \cdot (4 + 2 \cdot (-8)) = 2 \cdot (4 - 16) = -24 \end{aligned}$$

Pak

$$\varphi''(0) = -\frac{A(0) - B(0)}{(F'_y(0, 1))^2} = -\frac{-10 + 24}{1} = -14$$

Tečná nadrovina: Dosadíme do definice.

$$y = T(x) = \varphi(x_0) + \varphi'(x_0)(x - x_0) = 1 + 2(x - 0) = 1 + 2x$$

Monotonie a konvexita:

První i druhá derivace vychází nulová. Na okolí bodu nemůžeme spočítat derivace funkce φ , neb nemáme předpis a nemůžeme využít vzorce z Věty 22, neb do předpisu pro derivaci nemůžeme nic dosadit. Nemůžeme tedy vědět, zda na okolí bodu x_0 jsou derivace kladné, záporné, či se jim mění znaménko. Nelze proto rozhodnout otázku konvexity a monotonie.

Příklad 1 (c) $e^{xy} + \sin y + y^2 = 1, [x_0, y_0] = [2, 0]$

Implicitní funkce: Anulujeme rovnici a zavedme funkci $F(x, y) = e^{xy} + \sin y + y^2 - 1$. Ověříme předpoklady Věty 22.

$$\begin{aligned} F'_x(x, y) &= ye^{xy} \\ F'_y(x, y) &= xe^{xy} + \cos y + 2y \end{aligned}$$

Zřejmě $F \in C^1(\mathbb{R})$, $F(x_0, y_0) = 0$ a $F'_y(x_0, y_0) = 3 \neq 0$.

Dle Věty 22 zadaná rovnice určuje na okolí bodu $[x_0, y_0]$ implicitně zadanou funkci φ a platí, že $\varphi(x_0) = y_0$.

První derivace φ : Do zadané rovnice za y dosadíme $\varphi(x)$, rovnici zderivujeme podle x a vyjádříme $\varphi'(x)$.

$$\begin{aligned} e^{x\varphi(x)} + \sin(\varphi(x)) + \varphi(x)^2 - 1 &= 0 \\ (\varphi(x) + x\varphi'(x)) e^{x\varphi(x)} + \cos(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) + 2\varphi(x) \cdot \varphi'(x) &= 0 \\ \varphi'(x) \left(xe^{x\varphi(x)} + \cos(\varphi(x)) + 2\varphi(x) \right) &= -\varphi(x)e^{x\varphi(x)} \\ \varphi'(x) &= -\frac{\varphi(x)e^{x\varphi(x)}}{xe^{x\varphi(x)} + \cos(\varphi(x)) + 2\varphi(x)} \\ \varphi'(x_0) &= \frac{-0 \cdot 1}{2 + 1 + 2 \cdot 0} = 0 \end{aligned}$$

Druhá derivace φ : Předpis pro φ' zderivujeme podle x a dostaneme následující.

$$\begin{aligned} A(x) &:= \varphi(x)e^{x\varphi(x)} \\ B(x) &:= xe^{x\varphi(x)} + \cos(\varphi(x)) + 2\varphi(x) \\ A'(x) &= \varphi'(x)e^{x\varphi(x)} + \varphi(x)(\varphi(x) + x \cdot \varphi'(x))e^{x\varphi(x)} \\ B'(x) &= e^{x\varphi(x)} + x(\varphi(x) + x\varphi'(x))e^{x\varphi(x)} - \sin(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) + 2\varphi'(x) \\ \varphi''(x) &= -\frac{A'(x)B(x) - A(x)B'(x)}{B^2(x)} \\ A(x_0) &= 0, A'(x_0) = 0 \\ B(x_0) &= 3, B'(x_0) = 1 \\ \varphi''(x_0) &= \frac{0}{9} = 0 \end{aligned}$$

Tečná nadrovina: Dosadíme do definice.

$$y = T(x) = \varphi(x_0) + \varphi'(x_0)(x - x_0) = 0$$

Monotonie a konvexita:

První i druhá derivace vychází nulová. Na okolí bodu nemůžeme spočítat derivace funkce φ , neb nemáme předpis a nemůžeme využít vzorce z Věty 22, neb do předpisu pro derivaci nemůžeme nic dosadit. Nemůžeme tedy vědět, zda na okolí bodu x_0 jsou derivace kladné, záporné, či se jim mění znaménko. Nelze proto rozhodnout otázku konvexity a monotonie.

Příklad 1 (d) $\sin(xy) + \cos(xy) = 1$, $[x_0, y_0] = [\pi, 0]$

Implicitní funkce: Anulujeme rovnici a zavedeme funkci $F(x, y) = \sin(xy) + \cos(xy) - 1$. Ověříme předpoklady Věty 22.

$$\begin{aligned} F'_x(x, y) &= y \cos(xy) - y \sin(xy) \\ F'_y(x, y) &= x \cos(xy) - x \sin(xy) \end{aligned}$$

Zřejmě $F \in C^1(\mathbb{R})$, $F(x_0, y_0) = 0$ a $F'_y(x_0, y_0) = \pi \neq 0$.

Dle Věty 22 zadaná rovnice určuje na okolí bodu $[x_0, y_0]$ implicitně zadanou funkci φ a platí, že $\varphi(x_0) = y_0$.

První derivace φ : Do zadané rovnice za y dosadíme $\varphi(x)$, rovnici zderivujeme podle x a vyjádříme $\varphi'(x)$.

$$\begin{aligned} \sin(x\varphi(x)) + \cos(x\varphi(x)) - 1 &= 0 \\ \cos(x\varphi(x)) \cdot (\varphi(x) + x\varphi'(x)) - \sin(x\varphi(x)) \cdot (\varphi(x) + x\varphi'(x)) &= 0 \\ \varphi'(x) (x \cos(x\varphi(x)) - x \sin(x\varphi(x))) &= \varphi(x) (\sin(x\varphi(x)) - \cos(x\varphi(x))) \\ \varphi'(x) &= \frac{\varphi(x) (\sin(x\varphi(x)) - \cos(x\varphi(x)))}{x \cos(x\varphi(x)) - x \sin(x\varphi(x))} \\ \varphi'(x_0) &= \frac{0}{\pi} = 0 \end{aligned}$$

Druhá derivace φ : Předpis pro φ' zderivujeme podle x a dostaneme následující.

$$\begin{aligned} A(x) &:= \varphi(x) (\sin(x\varphi(x)) - \cos(x\varphi(x))) \\ B(x) &:= x \cos(x\varphi(x)) - x \sin(x\varphi(x)) \\ A'(x) &= \varphi'(x) (\sin(x\varphi(x)) - \cos(x\varphi(x))) + \varphi(x) (\varphi(x) + x\varphi'(x)) (\cos(x\varphi(x)) + \sin(x\varphi(x))) \\ B'(x) &= \cos(x\varphi(x)) - \sin(x\varphi(x)) + x (\varphi(x) + x\varphi'(x)) (-\sin(x\varphi(x)) - \cos(x\varphi(x))) \\ \varphi''(x) &= \frac{A'(x)B(x) - A(x)B'(x)}{B^2(x)} \\ A(x_0) &= 0, \quad A'(x_0) = 0 \\ B(x_0) &= \pi, \quad B'(x_0) = 1 \\ \varphi''(x_0) &= 0 \end{aligned}$$

Tečná nadrovina: Dosadíme do definice.

$$y = T(x) = \varphi(x_0) + \varphi'(x_0)(x - x_0) = 0 + 0 \cdot (x - \pi) = 0$$

Monotonie a konvexita:

První i druhá derivace vychází nulová. Na okolí bodu nemůžeme spočítat derivace funkce φ , neb nemáme předpis a nemůžeme využít vzorce z Věty 22, neb do předpisu pro derivaci nemůžeme nic dosadit. Nemůžeme tedy vědět, zda na okolí bodu x_0 jsou derivace kladné, záporné, či se jim mění znaménko. Nelze proto rozhodnout otázku konvexity a monotonie.

Příklad 1 (e) $\log(x^2 + y^2 + \cos(xy)) + y = 0, [x_0, y_0] = [0, 0]$

Implicitní funkce: Zavedme funkci $F(x, y) = \log(x^2 + y^2 + \cos(xy)) + y$. Ověřme předpoklady Věty 22.

$$F'_x(x, y) = \frac{2x - y \sin(xy)}{x^2 + y^2 + \cos(xy)}$$

$$F'_y(x, y) = \frac{2y - x \cos(xy)}{x^2 + y^2 + \cos(xy)} + 1$$

Zřejmě $F \in C^1(G)$, kde je dostatečně malé ot. okolí počátku, $F(x_0, y_0) = 0$ a $F'_y(x_0, y_0) = 1 \neq 0$.

Dle Věty 22 zadaná rovnice určuje na okolí bodu $[x_0, y_0]$ implicitně zadanou funkci φ a platí, že $\varphi(x_0) = y_0$.

První derivace φ : Do zadané rovnice za y dosadíme $\varphi(x)$, rovnici zderivujeme podle x a vyjádříme $\varphi'(x)$.

$$\begin{aligned} \log(x^2 + \varphi(x)^2 + \cos(x\varphi(x))) + \varphi(x) &= 0 \\ \frac{2x + 2\varphi(x)\varphi'(x) - \sin(x\varphi(x))(\varphi(x) + x\varphi'(x))}{x^2 + \varphi(x)^2 + \cos(x\varphi(x))} + \varphi'(x) &= 0 \\ \varphi'(x)(x^2 + \varphi(x)^2 + \cos(x\varphi(x)) + 2\varphi(x) - x\sin(x\varphi(x))) &= -2x + \sin(x\varphi(x))\varphi(x) \\ \varphi'(x) &= \frac{-2x + \sin(x\varphi(x))\varphi(x)}{x^2 + \varphi(x)^2 + \cos(x\varphi(x)) + 2\varphi(x) - x\sin(x\varphi(x))} \\ \varphi'(x_0) &= 0 \end{aligned}$$

Druhá derivace φ : Předpis pro φ' zderivujeme podle x a dostaneme následující.

$$\begin{aligned} A(x) &:= -2x + \sin(x\varphi(x))\varphi(x) \\ B(x) &:= x^2 + \varphi(x)^2 + \cos(x\varphi(x)) + 2\varphi(x) - x\sin(x\varphi(x)) \\ \varphi''(x) &= \frac{A'(x)B(x) - A(x)B'(x)}{B^2(x)} \\ A'(x) &= -2 + \cos(x\varphi(x))(\varphi(x) + x\varphi'(x))\varphi(x) + \sin(x\varphi(x))\varphi'(x) \\ A'(x_0) &= -2 \\ A(x_0) &= 0 \\ B(x_0) &= 1 \\ \varphi''(x_0) &= \frac{-2 \cdot 1 - 0}{1^2} = -2 \end{aligned}$$

Tečná nadrovina: Dosadíme do definice.

$$y = T(x) = \varphi(x_0) + \varphi'(x_0)(x - x_0) = 0$$

Monotonie a konvexita:

První derivace vychází nulová. Na okolí bodu nemůžeme spočítat derivace funkce φ , neb nemáme předpis a nemůžeme využít vzorce z Věty 22, neb do předpisu pro derivaci nemůžeme nic dosadit. Nemůžeme

tedy vědět, zda na okolí bodu x_0 jsou derivace kladné, záporné, či se jim mění znaménko. Nelze proto rozhodnout otázku monotonie.

Dle spočítaného je $\varphi''(x_0) < 0$ a víme, že funkce φ má spojitou druhou derivaci. Platí proto, že druhá derivace je na okolí x_0 záporná, tedy funkce je v x_0 konkávní.

Příklad 1 (j) $e^{\sin x^2} + e^{\sin(xy)} = 2y + 2$, $[x_0, y_0] = [0, 0]$

Implicitní funkce: Anulujeme rovnici a zavedme funkci $F(x, y) = e^{\sin x^2} + e^{\sin(xy)} - 2y - 2$. Ověříme předpoklady Věty 22.

$$\begin{aligned} F'_x(x, y) &= 2x \cos(x^2) e^{\sin x^2} + y \cos(xy) e^{\sin(xy)} \\ F'_y(x, y) &= x \cos(xy) e^{\sin(xy)} - 2 \end{aligned}$$

Zřejmě $F \in C^1(\mathbb{R})$, $F(x_0, y_0) = 0$ a $F'_y(x_0, y_0) = -2 \neq 0$.

Dle Věty 22 zadaná rovnice určuje na okolí bodu $[x_0, y_0]$ implicitně zadanou funkci φ a platí, že $\varphi(x_0) = y_0$.

První derivace φ : Dle Věty 22 platí následující.

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= -\frac{F'_x(x, \varphi(x))}{F'_y(x, \varphi(x))} \\ \varphi'(x_0) &= -\frac{0+0}{0-2} = 0 \end{aligned}$$

Druhá derivace φ : Zderivujeme předchozí vztah pro $\varphi'(x)$ podle Věty 20 a 21.

$$\begin{aligned} \varphi''(x) &= \frac{\partial}{\partial x} - \frac{F'_x(x, \varphi(x))}{F'_y(x, \varphi(x))} = -\frac{\frac{\partial}{\partial x} F'_x(x, \varphi(x)) \cdot F'_y(x, \varphi(x)) - F'_x(x, \varphi(x)) \cdot \frac{\partial}{\partial x} F'_y(x, \varphi(x))}{(F'_y(x, \varphi(x)))^2} \\ F''_{x,x}(x, y) &= e^{\sin x^2} (2 \cos(x^2) - 4x^2 \sin(x^2) + 4x^2 \cos^2(x^2)) + e^{\sin(xy)} (y^2 \cos^2(xy) - y^2 \sin(xy)) \\ F''_{x,y}(x, y) &= F''_{y,x} = \cos(xy) e^{\sin(xy)} + x (-y \sin(xy) e^{\sin(xy)} + y \cos^2(xy) e^{\sin(xy)}) \\ F''_{y,y}(x, y) &= x (-x \sin(xy) e^{\sin(xy)} + x \cos^2(xy) e^{\sin(xy)}) \\ \frac{\partial}{\partial x} F'_x(x, \varphi(x)) &= F''_{x,x}(x, \varphi(x)) + F''_{x,y}(x, \varphi(x)) \cdot \varphi'(x) \\ \frac{\partial}{\partial x} F'_y(x, \varphi(x)) &= F'_{y,x}(x, \varphi(x)) + F''_{y,y}(x, \varphi(x)) \cdot \varphi'(x) \\ F''_{x,x}(x_0, \varphi(x_0)) &= 2 \\ F''_{x,y}(x_0, \varphi(x_0)) &= F''_{y,x}(x_0, \varphi(x_0)) = 1 \\ F''_{y,y}(x_0, \varphi(x_0)) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} F'_x(x_0, \varphi(x_0)) &= 2 \\ \frac{\partial}{\partial x} F'_y(x_0, \varphi(x_0)) &= 1 \\ \varphi''(x_0) &= -\frac{2 \cdot (-2) - 0 \cdot 1}{(-2)^2} = -\frac{-4}{4} = 1 \end{aligned}$$

Tečná nadrovina: Dosadíme do definice.

$$y = T(x) = \varphi(x_0) + \varphi'(x_0)(x - x_0) = 0$$

Monotonie a konvexita:

První derivace vychází nulová. Na okolí bodu nemůžeme spočítat derivace funkce φ , neb nemáme předpis a nemůžeme využít vzorce z Věty 22, neb do předpisu pro derivaci nemůžeme nic dosadit. Nemůžeme tedy vědět, zda na okolí bodu x_0 jsou derivace kladné, záporné, či se jim mění znaménko. Nelze proto rozhodnout otázku monotonie.

Dle spočítaného je $\varphi''(x_0) > 0$ a víme, že funkce φ má spojitou druhou derivaci. Platí proto, že druhá derivace je na okolí x_0 kladná, tedy funkce je v x_0 konvexní.

Příklad 2 (a) $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy - z = 9, [x_0, y_0, z_0] = [1, -2, 1]$

Implicitní funkce: Anulujeme rovnici a zavedme funkci $F(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy - z - 9$. Ověříme předpoklady Věty 22.

$$F'_x(x, y, z) = 2x + y$$

$$F'_y(x, y, z) = 4y + x$$

$$F'_z(x, y, z) = 6z - 1$$

Zřejmě $F \in C^1(\mathbb{R})$, $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ a $F'_z(x_0, y_0, z_0) = 5 \neq 0$.

Dle Věty 22 zadaná rovnice určuje na okolí bodu $[x_0, y_0, z_0]$ implicitně zadanou funkci φ a platí, že $\varphi(x_0, y_0) = z_0$.

Derivace φ : Do zadané rovnice za z dosadíme $\varphi(x, y)$, rovnici zderivujeme podle x a vyjádříme $\varphi'_x(x, y)$. Pak rovnici zderivujeme podle y a vyjádříme $\varphi'_y(x, y)$.

$$x^2 + 2y^2 + 3\varphi(x, y)^2 + xy - \varphi(x, y) - 9 = 0$$

$$2x + 6\varphi(x, y)\varphi'_x(x, y) + y - \varphi'_x(x, y) = 0$$

$$\varphi'_x(x, y) = \frac{-2x - y}{6\varphi(x, y) - 1}$$

$$\varphi'_x(x_0, y_0) = \frac{-2 + 2}{6 \cdot 1 - 1} = 0$$

$$4y + 6\varphi(x, y)\varphi'_y(x, y) + x - \varphi'_y(x, y) = 0$$

$$\varphi'_y(x, y) = \frac{-4y - x}{6\varphi(x, y) - 1}$$

$$\varphi'_y(x_0, y_0) = \frac{8 - 1}{5} = \frac{7}{5}$$

Tečná nadrovina: Dosadíme do definice.

$$T(x, y) = \varphi(x_0, y_0) + \varphi'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + \varphi'_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 1 + 0 + \frac{7}{5}(y + 2)$$

Příklad 2 (c) $\sin(yz) = \frac{x}{z}, [x_0, y_0, z_0] = [1, \frac{\pi}{2}, 1]$

Implicitní funkce: Anulujeme rovnici a zavedme funkci $F(x, y, z) = \sin(yz) - \frac{x}{z}$. Ověříme předpoklady Věty 22.

$$F'_x(x, y, z) = -\frac{1}{z}$$

$$F'_y(x, y, z) = z \cos(yz)$$

$$F'_z(x, y, z) = y \cos(yz) + \frac{x}{z^2}$$

Zřejmě $F \in C^1(\mathbb{R})$, $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ a $F'_z(x_0, y_0, z_0) = 1 \neq 0$.

Dle Věty 22 zadaná rovnice určuje na okolí bodu $[x_0, y_0, z_0]$ implicitně zadanou funkci φ a platí, že $\varphi(x_0, y_0) = z_0$.

Derivace φ : Podle Věty 22 platí následující.

$$\begin{aligned}\varphi'_x(x_0, y_0) &= -\frac{F'_x(x_0, y_0, \varphi(x_0, y_0))}{F'_z(x_0, y_0, \varphi(x_0, y_0))} = -\frac{-1}{1} = 1 \\ \varphi'_y(x_0, y_0) &= -\frac{F'_y(x_0, y_0, \varphi(x_0, y_0))}{F'_z(x_0, y_0, \varphi(x_0, y_0))} = -\frac{0}{1} = 0\end{aligned}$$

Tečná nadrovina: Dosadíme do definice.

$$T(x, y) = \varphi(x_0, y_0) + \varphi'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + \varphi'_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 1 + (x - 1) + 0 = x$$

Příklad 2 (d) $-e^{xy} + e^{yz} + e^{xz} = e^{xyz}$, $[x_0, y_0, z_0] = [0, 2, 0]$

Implicitní funkce: Anulujme rovnici a zaveďme funkci $F(x, y, z) = -e^{xy} + e^{yz} + e^{xz} - e^{xyz}$. Ověřme předpoklady Věty 22.

$$\begin{aligned}F'_x(x, y, z) &= -ye^{xy} + ze^{xz} - yze^{xyz} \\ F'_y(x, y, z) &= -xe^{xy} + ze^{yz} - xze^{xyz} \\ F'_z(x, y, z) &= ye^{yz} + xe^{xz} - xye^{xyz}\end{aligned}$$

Zřejmě $F \in C^1(\mathbb{R})$, $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ a $F'_z(x_0, y_0, z_0) = 2 \neq 0$.

Dle Věty 22 zadaná rovnice určuje na okolí bodu $[x_0, y_0, z_0]$ implicitně zadanou funkci φ a platí, že $\varphi(x_0, y_0) = z_0$.

Derivace φ : Podle Věty 22 platí následující.

$$\begin{aligned}\varphi'_x(x_0, y_0) &= -\frac{F'_x(x_0, y_0, \varphi(x_0, y_0))}{F'_z(x_0, y_0, \varphi(x_0, y_0))} = -\frac{-2}{2} = 1 \\ \varphi'_y(x_0, y_0) &= -\frac{F'_y(x_0, y_0, \varphi(x_0, y_0))}{F'_z(x_0, y_0, \varphi(x_0, y_0))} = -\frac{0}{2} = 0\end{aligned}$$

Tečná nadrovina: Dosadíme do definice.

$$T(x, y) = \varphi(x_0, y_0) + \varphi'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + \varphi'_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0 + 1(x - 0) + 0(y - 2) = x$$

Příklad 2 (e) $\frac{x}{z} = \log \frac{z}{y}, [x_0, y_0, z_0] = [0, 1, 1]$

Implicitní funkce: Anulujeme rovnici a zavedeme funkci $F(x, y, z) = \frac{x}{z} - \log \frac{z}{y}$. Ověříme předpoklady Věty 22.

$$\begin{aligned}F'_x(x, y, z) &= \frac{1}{z} \\F'_y(x, y, z) &= \frac{y}{z} \cdot \frac{z}{y^2} = \frac{1}{y} \\F'_z(x, y, z) &= -\frac{x}{z^2} - \frac{y}{z} \cdot \frac{1}{y} = \frac{-x - z}{z^2}\end{aligned}$$

Zřejmě $F \in C^1(\mathbb{R})$, $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ a $F'_z(x_0, y_0, z_0) = -1 \neq 0$.

Dle Věty 22 zadaná rovnice určuje na okolí bodu $[x_0, y_0, z_0]$ implicitně zadanou funkci φ a platí, že $\varphi(x_0, y_0) = z_0$.

Derivace φ : Podle Věty 22 platí následující.

$$\begin{aligned}\varphi'_x(x_0, y_0) &= -\frac{F'_x(x_0, y_0, \varphi(x_0, y_0))}{F'_z(x_0, y_0, \varphi(x_0, y_0))} = -\frac{1}{-1} = 1 \\ \varphi'_y(x_0, y_0) &= -\frac{F'_y(x_0, y_0, \varphi(x_0, y_0))}{F'_z(x_0, y_0, \varphi(x_0, y_0))} = -\frac{1}{-1} = 1\end{aligned}$$

Tečná nadrovina: Dosadíme do definice.

$$T(x, y) = \varphi(x_0, y_0) + \varphi'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + \varphi'_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 1 + (x - 0) + (y - 1)$$